

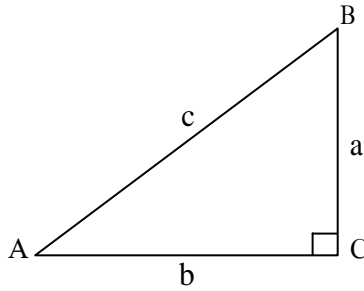


## ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์กับตรีโกณมิติ



ทักษะและกระบวนการทางคณิตศาสตร์เป็นพื้นฐานสำคัญในการนำไปใช้เพื่อการศึกษาและแก้ปัญหาในสถานการณ์ต่าง ๆ และเป็นกระบวนการในการแสวงหาความรู้ใหม่ ดังที่จะกล่าวถึงเป็นตัวอย่างให้เห็นในหัวข้อต่อไปนี้

**อัตราส่วนตรีโกณมิติ** คือ อัตราส่วนของความยาวของด้านของสามเหลี่ยมมุมฉาก พิจารณารูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม C เป็นมุมฉาก



จากรูปสามเหลี่ยม ACB

$\overline{AB}$  เป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามมุมฉาก ยาว  $c$  หน่วย

$\overline{BC}$  เป็นด้านที่อยู่ตรงข้ามมุม A ยาว  $a$  หน่วย

$\overline{AC}$  เป็นด้านประชิดมุม A ยาว  $b$  หน่วย

เรียกอัตราส่วน  $\frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$  ว่าไซน์ (sine) ของมุม A และเขียนแทนด้วย  $\sin A = \frac{BC}{AB} = \frac{a}{c}$

เรียกอัตราส่วน  $\frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$  ว่าโคไซน์ (cosine) ของมุม A และเขียนด้วย  $\cos A = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}$

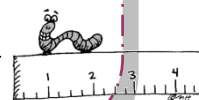
เรียกอัตราส่วน  $\frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$  ว่าแทนเจนต์ (tangent) ของมุม A และเขียนด้วย  $\tan A = \frac{BC}{AC} = \frac{a}{b}$

\*\*สรุปบทนิยามของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุม A ในกรณีที่  $\hat{A}$  เป็นมุมแหลม

ไซน์ของมุม A ( $\sin A$ ) คือ  $\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

โคไซน์ของมุม A ( $\cos A$ ) คือ  $\frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$

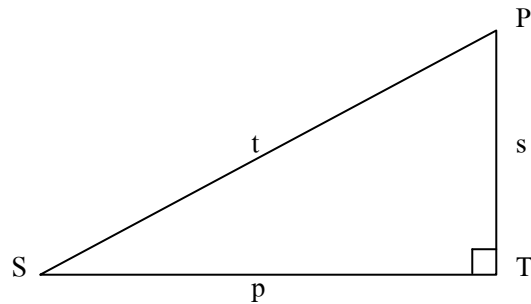
แทนเจนต์ของมุม A ( $\tan A$ ) คือ  $\frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$



และจะเรียกอัตราส่วนของความยาวของด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากทั้งสามอัตราส่วนนี้ว่า **อัตราส่วนตรีโกณมิติ**

เรานิยมเขียน	$\sin A$	แทน	ไซน์ของ	$A$
	$\cos A$	แทน	โคไซน์ของ	$A$
	$\tan A$	แทน	แทนเจดจ์ของมุม	$A$

ให้นักเรียนร่วมกันพิจารณาและอภิปรายหาอัตราส่วนของ  $\sin S$ ,  $\cos S$ ,  $\tan S$ ,  $\sin P$ ,  $\cos P$ , และ  $\tan P$  จากรูปสามเหลี่ยมที่กำหนดให้



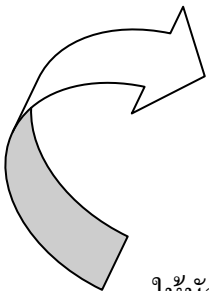
จะได้  $\sin S =$  และ  $\sin P =$

และ  $\cos S =$  และ  $\cos P =$

และ  $\tan S =$  และ  $\tan P =$

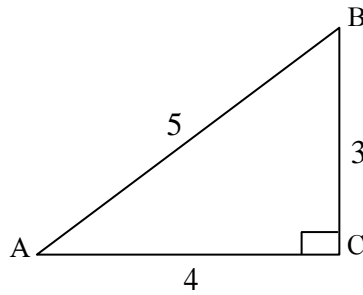
\*\*\*อัตราส่วนตรีโกณมิติเบื้องต้นที่มีการใช้บ่อยคือค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจดจ์ของมุมที่มีขนาด  $30^\circ$ ,  $45^\circ$  และ  $60^\circ$

A	$\sin A$	$\cos A$	$\tan A$
$30^\circ$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$45^\circ$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$60^\circ$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$



ให้นักเรียนฝึกอ่านค่าของอัตราส่วนตรีโกณมิติของมุมที่มีขนาดระหว่าง  $0^\circ$  และ  $90^\circ$  จากตาราง

ตัวอย่างที่ 1 จงหาค่าของไซน์ โคไซน์ และแทนเจนต์ของมุม A และมุม B จากรูปต่อไปนี้



วิธีทำ จากรูป

$$\sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{3}{5}$$

$$\cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}} = \frac{4}{5}$$

$$\tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}} = \frac{3}{4}$$

ในทำนองเดียวกัน จะได้ว่า

$$\sin B =$$

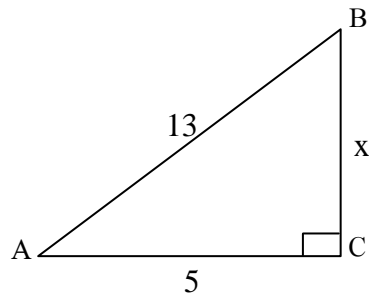
$$\cos B =$$

$$\tan B =$$





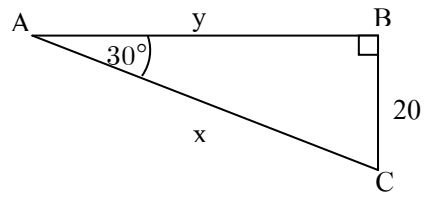
ตัวอย่างที่ 2 จงหาค่าของ  $\sin A + \cos A$  จากรูปต่อไปนี้



วิธีทำ



ตัวอย่างที่ 3 กำหนดให้  $\triangle ABC$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมี  $\hat{B}$  เป็นมุมฉาก จงหาค่า  $x$  และ  $y$



วิธีทำ

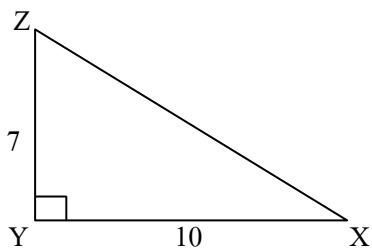
ตัวอย่างที่ 4 กำหนดให้  $\triangle XYZ$  เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉากมี  $\hat{Y}$  เป็นมุมฉาก จงหาค่า  $x$  และ  $y$

$ZY = 7$  หน่วย และ  $YX = 10$  หน่วย จงหา

$\hat{X}$  ขนาดของมุม  $\hat{Z}$  และความยาว

ของ  $\overline{XZ}$

ขนาดของ



วิธีทำ

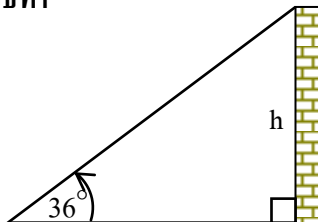
ตัวอย่างที่ 5 กำหนดให้สามเหลี่ยม  $ABC$  มีด้าน  $BC$  ยาว 18 นิ้ว  $\hat{B}=30^\circ$  และ  $\hat{C}=60^\circ$

จงหาความยาวของด้าน  $AC$

วิธีทำ จากสิ่งที่กำหนดให้เขียนเป็นรูปได้ดังนี้

ตัวอย่างที่ 6 เวียร์ยืนห่างจากตึกแห่งหนึ่ง 150 เมตร เมื่อมองขึ้นไปบนยอดตึกแนวสายตาที่วันมองเห็นยอดตึกทำมุมขนาดประมาณ  $36^\circ$ พอดี จงหาว่าตึกนี้สูงประมาณกี่เมตร

วิธีทำ

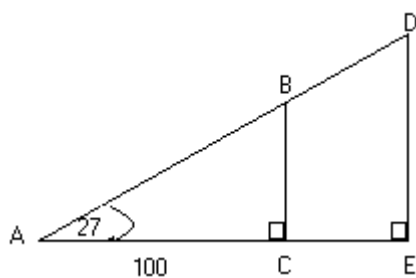


ตัวอย่างที่ 7 บ้านไฉ่ยาว 50 ฟุต พาดอยู่กับกำแพง ปลายบันไดถึงขอบกำแพงพอดี ถ้าบันไดทำมุม 60 องศา กับกำแพง จงหาว่า โคนอีกข้างหนึ่งอยู่ห่างจากกำแพงเท่าไร

วิธีทำ

ตัวอย่างที่ 4 ปล่องไฟปล่องหนึ่งสูงกว่าอีกปล่องหนึ่ง 30 หลา มาณะยีนอยู่ห่างจากปล่องเตี้ย 100 หลา สังเกตเห็นว่าเส้นตรงเชื่อมระหว่างยอดปล่องไฟทั้งสองเฉียงเป็นมุม  $27^\circ$  กับพื้นราบ จงหาความสูงของปล่องไฟทั้งสอง (กำหนด  $\tan 27^\circ = 0.51$ )

วิธีทำ



จากรูป BC และ DE เป็นความสูงของปล่องไฟทั้งสอง  
A เป็นตำแหน่งที่มานะยีนอยู่  
AC = 100 หลา

จากสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ; จะได้

$$\tan 27^\circ = \frac{BC}{AC}$$

$$0.51 = \frac{BC}{100}$$

$$BC = 0.51 \times 100$$

$$= 51$$

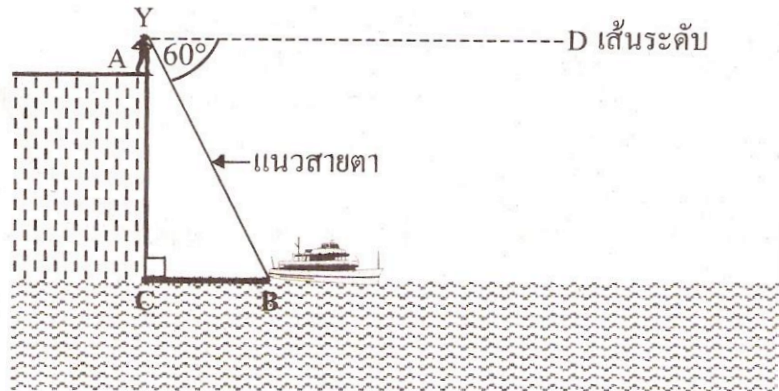
นั่นคือ  $ED = BC + 30$

$$= 51 + 30$$

$$= 81$$

ดังนั้น ปล่องไฟทั้งสองสูง 51 และ 81 หลา

**ตัวอย่างที่ 5** นาวินยืนอยู่บนหน้าผาแห่งหนึ่ง ซึ่งสูงจากระดับน้ำทะเล 48.30 เมตร เมื่อเขามองลงไปยังเรือลำหนึ่งกลางทะเล โดยมุมที่แนวสายตาทำกับเส้นระดับมีขนาดประมาณ  $60^\circ$  ถ้าความสูงจากพื้นถึงตาของนาวิน เท่ากับ 1.70 เมตร เรือลำนี้อยู่ห่างจากเชิงหน้าผาประมาณกี่เมตร



**วิธีทำ** ให้ A เป็นตำแหน่งที่นาวินยืน  
 AC เป็นความสูงของหน้าผาจากระดับน้ำทะเลซึ่งเท่ากับ 48.30 เมตร  
 YA เป็นความสูงจากพื้นหน้าผาถึงระดับสายตาของนาวินซึ่งเท่ากับ 1.70 เมตร  
 C เป็นจุดที่เชิงหน้าผาที่ระดับน้ำทะเล และ  $\hat{ACB}$  เป็นมุมฉาก  
 BC เป็นระยะทางที่เรือ (B) อยู่ห่างจากเชิงหน้าผา

$\hat{DYB}$  เท่ากับ 60 องศา

เนื่องจาก  $\overline{YD} \parallel \overline{BC}$

ดังนั้น  $\hat{DYB} = \hat{YBC} = 60^\circ$

จะได้  $\tan 60^\circ = \frac{YC}{BC}$

จากสายตาของนาวินจนถึงระดับน้ำทะเลมีระยะทาง  $48.30 + 1.70 = 50$  เมตร

ดังนั้น  $\sqrt{3} = \frac{50}{BC}$

$BC = \frac{50}{\sqrt{3}}$

$\approx 28.87$

นั่นคือ เรืออยู่ห่างจากเชิงหน้าผาประมาณ 28.87 เมตร



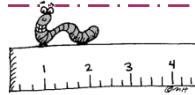


## ใบกิจกรรมที่ 1

### ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์กับตรีโกณมิติ

ชื่อ ..... ชั้น ..... เลขที่ .....

#### บทนิยามอัตราส่วนตรีโกณมิติ



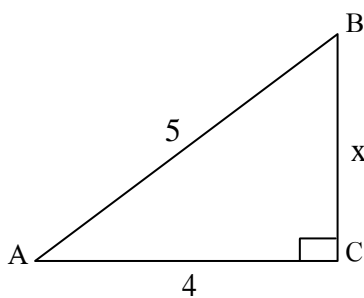
กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC ที่มีมุม B เป็นมุมฉากและมุม A เป็นมุมแหลม ดังนี้

$$\text{ไซน์ของมุม A} \quad \text{หรือ} \quad \sin A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\text{โคไซน์ของมุม A} \quad \text{หรือ} \quad \cos A = \frac{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุมฉาก}}$$

$$\text{แทนเจนต์ของมุม A} \quad \text{หรือ} \quad \tan A = \frac{\text{ความยาวของด้านตรงข้ามมุม A}}{\text{ความยาวของด้านประชิดมุม A}}$$

1. จงหาค่าของ  $\sin A$ ,  $\cos A$  และ  $\tan A$  จากรูปต่อไปนี้



เนื่องจาก ACB เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก

$$\text{จะได้} \quad AB^2 = AC^2 + BC^2$$

.....

.....

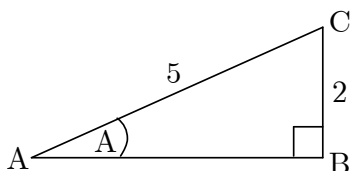
.....

.....

.....

นั่นคือ  $\sin A = \dots\dots\dots$ ,  $\cos A = \dots\dots\dots$  และ  $\tan A = \dots\dots\dots$

2. กำหนดให้ ABC เป็นรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก โดยที่  $\sin A = \frac{2}{5}$  จงหา  $\cos A$  และ  $\tan A$



จากโจทย์กำหนดให้ .....

ดังนั้น ความยาวด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉากจะเป็นดังรูป

จากรูปใช้ความรู้เกี่ยวกับทฤษฎีบทพีทาโกรัส หาคความยาวของด้าน AB ได้ดังนี้

.....

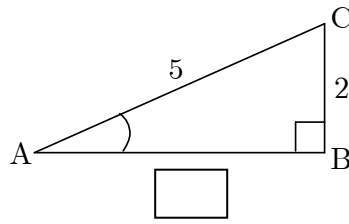
.....

.....

.....

.....

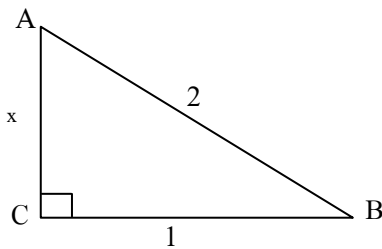
เพราะฉะนั้น ความยาวของด้านแต่ละด้านของรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC จะเป็น ดังรูป



อย่าลืมเติมความยาวของ  
ด้าน AB ในช่องที่เหลี่ยม  
นะครับ

ดังนั้น จากรูปจะได้ คำตอบคือ .....

3. ถ้า  $\sin A = \frac{1}{2}$  จงหาค่าของ  $\tan A$



.....

.....

.....

.....

.....

4. กำหนดให้  $\sin \theta = 0.602$  จงหาค่าของ  $\tan \theta$

.....

.....

.....

.....



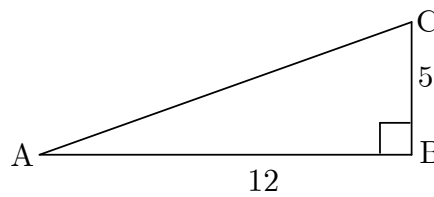
## เอกสารฝึกหัดที่ 1



### ทักษะกระบวนการทางคณิตศาสตร์กับตรีโกณมิติ

ชื่อ ..... ชั้น ..... เลขที่ .....

1. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC และความยาวของด้าน ดังรูป



จงหาค่า ต่อไปนี้

- |                                |                                |
|--------------------------------|--------------------------------|
| (1) $\sin A = \dots\dots\dots$ | (2) $\cos A = \dots\dots\dots$ |
| (3) $\tan A = \dots\dots\dots$ | (4) $\sin C = \dots\dots\dots$ |
| (5) $\cos C = \dots\dots\dots$ | (6) $\tan C = \dots\dots\dots$ |

2. จากตารางตรีโกณมิติ จงหาค่า

- |                                       |                                       |
|---------------------------------------|---------------------------------------|
| (1) $\sin 23^\circ = \dots\dots\dots$ | (2) $\cos 27^\circ = \dots\dots\dots$ |
| (3) $\tan 46^\circ = \dots\dots\dots$ | (4) $\sin 78^\circ = \dots\dots\dots$ |
| (5) $\cos 52^\circ = \dots\dots\dots$ | (6) $\tan 84^\circ = \dots\dots\dots$ |

3. จงหาค่าของ

(1)  $\sin 30^\circ + \cos 60^\circ + \tan 45^\circ$

.....  
 .....

(2)  $\sin 45^\circ - \cos 45^\circ + \tan 60^\circ$

.....  
 .....

(3)  $\sin 60^\circ - \cos 30^\circ + \tan 45^\circ$

.....  
 .....



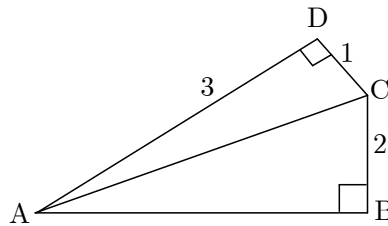
(4)  $\tan^2 30^\circ + \sin^2 45^\circ + \cos^2 45^\circ$

.....  
 .....

4. ถ้า  $\tan^2 45^\circ - \cos^2 60^\circ = x \sin 45^\circ \cos 45^\circ \tan^2 60^\circ$  จงหา  $x$

.....  
 .....

5. จงเติมคำตอบให้สมบูรณ์เมื่อกำหนดรูปสี่เหลี่ยมต่อไปนี้



- (1)  $\sin \widehat{CAD} = \dots\dots\dots$       (2)  $\cos \widehat{BAC} = \dots\dots\dots$   
 (3)  $\tan \widehat{ACB} = \dots\dots\dots$       (4)  $\sin \widehat{ACD} = \dots\dots\dots$   
 (5)  $\tan \widehat{BAC} = \dots\dots\dots$       (6)  $\cos \widehat{ACD} = \dots\dots\dots$

6. กำหนดรูปสามเหลี่ยมมุมฉาก ABC โดยมีมุม B เป็นมุมฉาก มุม A มีขนาด  $45^\circ$  และ AB ยาว 6 เซนติเมตร จงหาขนาดของมุมและความยาวของด้านที่เหลือ

.....  
 .....

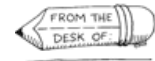
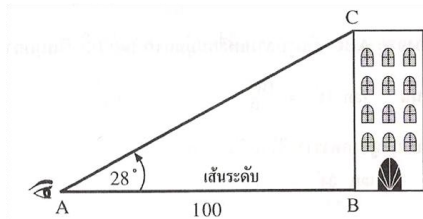


## ใบกิจกรรมที่ 2

### ตรีโกณมิติกับการนำไปใช้

ชื่อ ..... ชั้น ..... เลขที่.....

1. ชายคนหนึ่งยืนอยู่ห่างจากตึกหลังหนึ่งเป็นระยะทาง 100 เมตร ณ จุดที่ชายผู้นั้นยืนอยู่ มองเห็นยอดตึกทำมุมกับเส้นระดับเป็นมุม  $28^\circ$  จงหาความสูงของตึกดังกล่าว



.....

.....

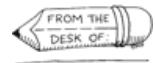
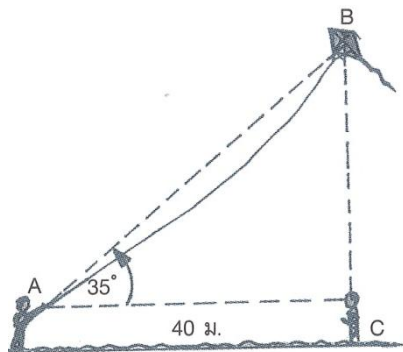
.....

.....

.....

.....

2. เหน่งและโหน่งเล่นว่าวที่สนามแห่งหนึ่ง ขณะที่ว่าวของเหน่งลอยอยู่บนท้องฟ้า ซึ่งตรงกับศีรษะของโหน่งพอดี เหน่งยืนห่างจากโหน่ง 40 เมตร เขาเงยหน้าขึ้นมองว่าวเป็นมุม  $35^\circ$  ถ้าโหน่งสูง 1.20 เมตร จงหาว่าว่าวอยู่สูงจากพื้นดินเท่าไร และต้องใช้เชือกว่าวอย่างน้อยกี่เมตร



.....

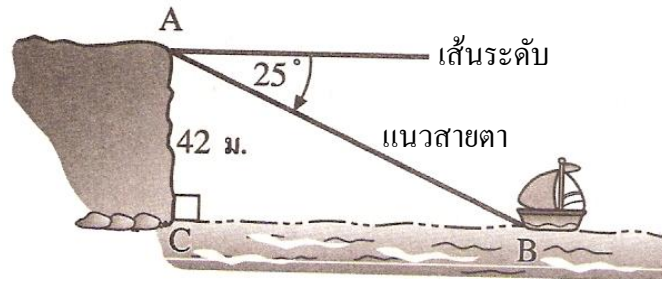
.....

.....

.....

.....

3. จากจุดยอดบนหน้าผาริมทะเลซึ่งตั้งตรงในแนวตั้ง ถ้ามองไปที่เรือลำหนึ่งซึ่งลอยอยู่ในทะเล พบว่ามุมที่แนวสายตาทำกับเส้นระดับมีขนาดประมาณ  $25^\circ$  ถ้าหน้าผาสูง 42 เมตร จากระดับน้ำทะเล จงหา ระยะห่างระหว่างเรือกับหน้าผา



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

1. พาดบันไดไว้กับกำแพงโดยให้ปลายบันไดตอนบนจดขอบกำแพงพอดี ถ้าบันไดยาว 6.5 เมตร และโคนบันไดอยู่ห่างจากกำแพง 4 เมตร บันไดนี้ทำมุมกับพื้นดินประมาณกี่องศาและกำแพงนี้สูงเท่าใด

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



“การพบเพื่อนที่ดี จะมีแต่สิ่งดีเข้ามา”

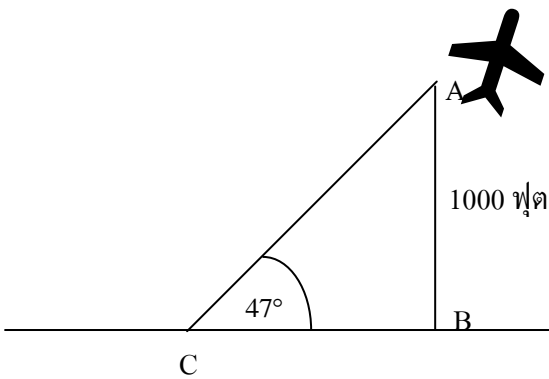
เอกสารฝึกหัดที่ 2



ตรีโกณมิติกับการนำไปใช้

ชื่อ ..... ชั้น ..... เลขที่.....

1. ณ สนามบินท่าอากาศยานกรุงเทพ เครื่องบินลำหนึ่งบินขึ้นสู่ท้องฟ้าทำมุมกับพื้นสนามบิน เป็นมุม  $47^\circ$  เมื่อถึงระยะเวลาหนึ่งเครื่องบินอยู่สูงจากพื้นดิน 1,000 ฟุต จงหาระยะทางที่ เครื่องบินเคลื่อนที่ไปได้ทั้งหมด



.....

.....

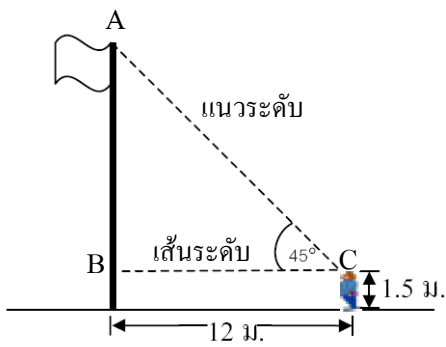
.....

.....

.....

.....

2. ลูกเสือคนหนึ่งต้องการหาความสูงของเสาธงของโรงเรียน ถ้าขณะที่เขามองยอดเสาธง มุมที่แนวสายตามองไปยังยอดเสาธงทำกับเส้นระดับเท่ากับ  $45^\circ$  เมื่อเขายืนอยู่ห่างจากเสาธงเป็นระยะทาง 12 เมตร และความสูงจากพื้นดินถึงระดับสายตาของเขาเป็น 1.5 เมตร จงหาว่าเสาธงสูงเท่าใดจากพื้นดิน



.....

.....

.....

.....

.....

.....



3. เงาของต้นสนต้นหนึ่งทอดตามพื้นดินยาว 20.5 เมตร ถ้ามุมที่แสงอาทิตย์ทำกับเส้นระดับเท่ากับ  $34^\circ$  จงหาความสูงของต้นสน

.....

.....

.....

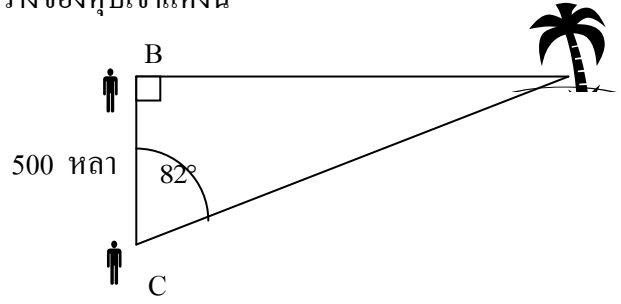
.....

.....

.....

.....

4. ในการสำรวจความกว้างของหุบเขาแห่งหนึ่ง นักสำรวจได้กำหนดตำแหน่งขึ้นมาตำแหน่งหนึ่งบริเวณริมหุบเขา ณ ตำแหน่งนี้เมื่อมองไปแนวตรง จะมองเห็นต้นไม้ต้นหนึ่งอยู่ริมหุบเขาฝั่งตรงข้าม หลังจากนั้นนักสำรวจเดินออกจากตำแหน่งดังกล่าว ในแนวทางซึ่งทำมุมเป็นมุมฉากกับแนวระหว่างจุดเดิมกับต้นไม้เป็นระยะทาง 500 หลา จึงหยุดและมองไปยังต้นไม้ต้นเดิมฝั่งตรงข้าม ปรากฏว่ามุมระหว่างแนวสายตาที่มองไปยังต้นไม้กับแนวที่เดินมาเท่ากับ  $82^\circ$  จงหาความกว้างของหุบเขาแห่งนี้



.....

.....

.....

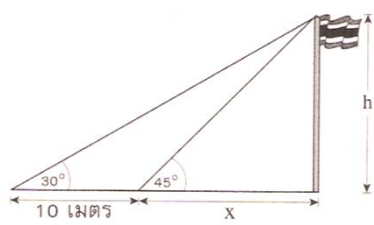
.....

.....

.....

.....

5. ณ จุด ๆ หนึ่งบนพื้นดิน มองเห็นยอดเสาธงต้นหนึ่งทำมุม  $30^\circ$  กับระดับสายตาพอดี เมื่อเดินตรงเข้าไปใกล้เสาธงอีก 10 เมตร จะมองเห็นยอดเสาธงทำมุมกับระดับสายตา  $45^\circ$  องศา จงหาว่าเสาธงสูงเท่าไร (กำหนด  $\sqrt{3} = 1.732$ )



.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....